Formation et Analyse d'Images

James L. Crowley

ENSIMAG 3 - Option IRV | Premier Semestre 2007/2008

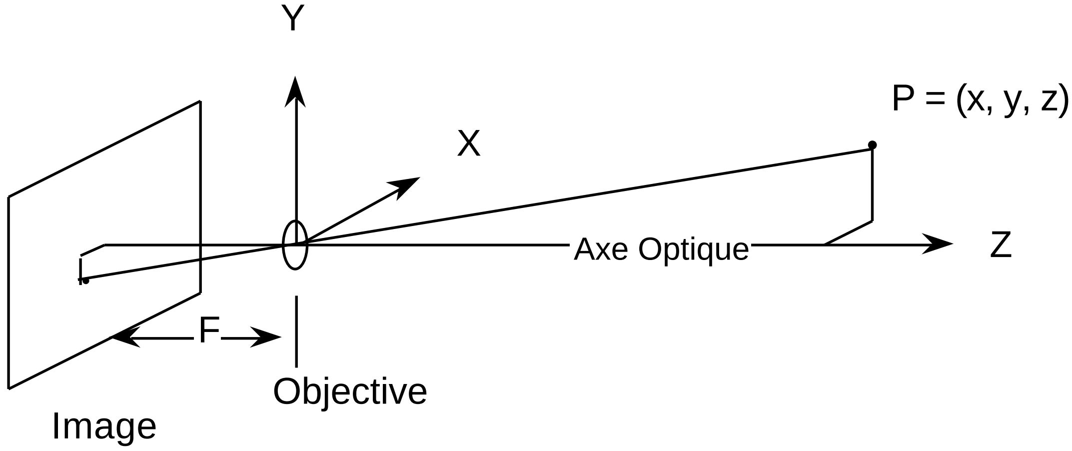
Séance 2 | 5 octobre 2007

Plan de la Séance :

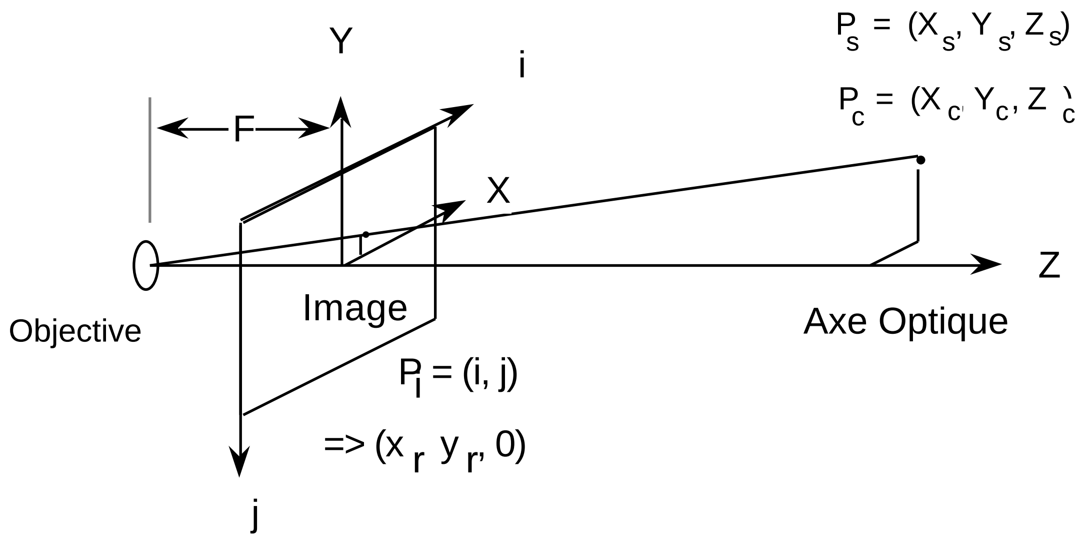
Modèle de la Caméra

Modèle de la Caméra

Modèle de la Caméra Géométrie Physique



Modèle Mathématique: Projection Centrale



Les Repères

Coordonnées de la Scène :

Point Scène : $P^s = (x_S, y_S, z_S, 1)^T$

Coordonnées de la Caméra :

Point Caméra : $P^c = (x_C, y_C, z_C, 1)^T$

Point Image : $P^r = (x_r, y_r, 1)^T$

Coordonnées de l'Image :

Point Image : $P^i = (i, j, 1)^T$

Nota : En coordonnées homogènes, les points sont invariant au multiplication par un constant.

$(i, j, 1)^T = A\cdot(i, j, 1)^T = (Ai, Aj, A)^T$

Transformations entres reperes

La modèle de la caméra est composé d'une composition de transformations.

Transformation entre repère <u>Caméra</u> et repère <u>Scène</u> :

$$P^c = \mathbf{T}^{c}_{s} P^s$$

Matrice de Projection ${}^{r}_{c}\mathbf{P}$ du repère <u>Caméra</u> vers le repère <u>Rétine</u>

$$P^r = \mathbf{P}^{r}_{c} P^c$$

Transformation entre repère image et repère caméra

$$P^i = \mathbf{C}^{i}_{r} \; w \, P^r$$

Composition : $P^i = \mathbf{C}^{i}_{r} \; \mathbf{P}^{r}_{c} \; \mathbf{T}^{c}_{s} \; P^s = \mathbf{M}^{i}_{s} \; P^s$

La Transformation Scène - Caméra

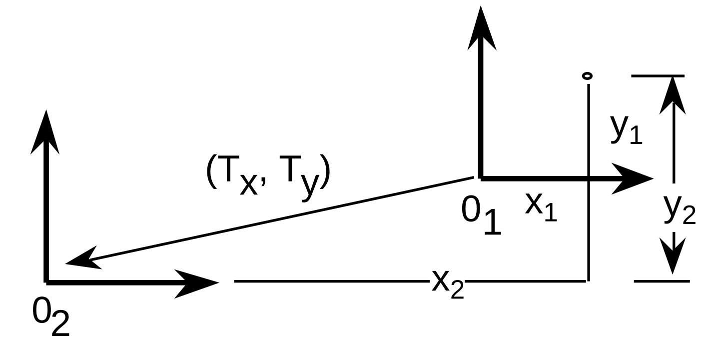
Dans les coordonnées homogènes, les translations, rotations, transformées affines et perspectives sont représentées par les produits des matrices.

La transformation $\mathbf{T}^{c}_{s}$ a la forme :

$$\mathbf{T}^{c}_{s} = \begin{pmatrix} & \mathbf{R}^{c}_{s} & & x_s \\ & & & y_s \\ & & & z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

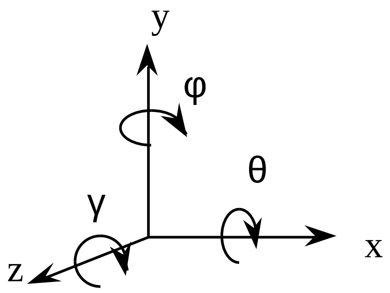
ou (x_s, y_s, z_s) est la position du repère scène dans le repere caméra.
et $\mathbf{R}^{c}_{s}$ est l'orientation du repère scène dans le repère caméra.

Translation — Addition en espace cartésien
Multiplications en Coordonnées Homogènes



T est un vecteur (vecteur de translation) de P_1 vers P_2

En 3D



Au tour de l'axe X :

$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}(\theta) & \mathrm{Sin}(\theta) & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}(\theta) & \mathrm{Cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'axe Y :

$$\mathbf{R}_Y(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\varphi) & 0 & -\mathrm{Sin}(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}(\varphi) & 0 & \mathrm{Cos}(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'axe Z :

$$\mathbf{R}_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\gamma) & \mathrm{Sin}(\gamma) & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}(\gamma) & \mathrm{Cos}(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

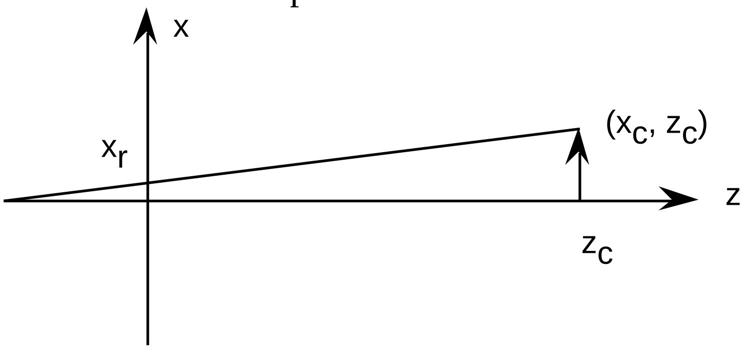
En Générale :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} & \mathbf{R} & & \begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou } \mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\gamma)\, \mathbf{R}_Y(\varphi)\, \mathbf{R}_X(\theta)$$

La Projection Caméra - Rétine (Le modèle Stenope)

La projection de la caméra vers la rétine est une projection perspective.

Considère une caméra 1-D dans une plan 2-D.



Dans le repère de la caméra :

> $(x_c, y_c, z_c, 1)$: Point dans la scène en repère caméra
> $(x_r, y_r, 1)$: Point dans la rétine en repère rétine.

Par triangles semblables :

$$\frac{x_r}{F} = \frac{x_c}{z_c} \quad \Leftrightarrow \quad x_r = x_c \frac{F}{z_c} \quad \Leftrightarrow \quad x_r \frac{z_c}{F} = x_c$$

$$\frac{y_r}{F} = \frac{y_c}{z_c} \quad \Leftrightarrow \quad y_r = y_c \frac{F}{z_c} \quad \Leftrightarrow \quad y_r \frac{z_c}{F} = y_c$$

soit : $w = \frac{z_c}{F}$

alors :

$$w\,x_r = x_c$$
$$w\,y_r = y_c$$
$$w = \frac{z_c}{F}$$

En matrice :

$$\begin{pmatrix} wx_r \\ wy_r \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

La transformation du repère <u>Caméra</u> vers le repère <u>Rétine</u> est :

$$P^r = \begin{pmatrix} wx_r \\ wy_r \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{P}_c^r \; P^c \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1/p^3 \\ p^2/p^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc : $\mathbf{P}_c^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} & 0 \end{pmatrix}$

Noter que $\mathbf{P}_c^r$ n'est pas inversible .

Si l'origine est dans la rétine, par triangles semblables :

$$\frac{x_r}{F} = \frac{x_c}{(F + z_c)} \qquad => \qquad x_r = \frac{x_c\ F}{(F + z_c)}$$

Equations de perspective:

$$x_r = \frac{x_c\ F}{(F+z_c)} \qquad\qquad y_r = \frac{y_c\ F}{(F+z_c)}$$

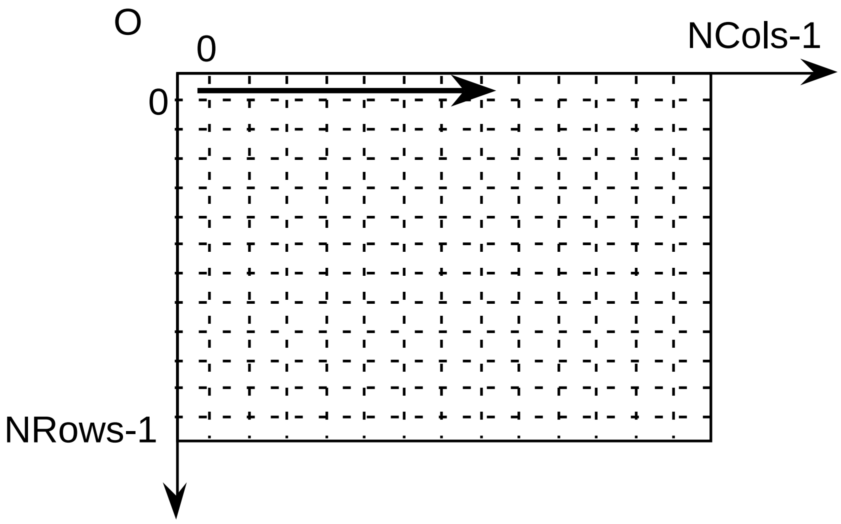
$$z_r = 0$$

et puis : $\mathbf{P}_c^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}$

La transformation Rétine - Image

Les paramètres Intrinsèques de la caméra

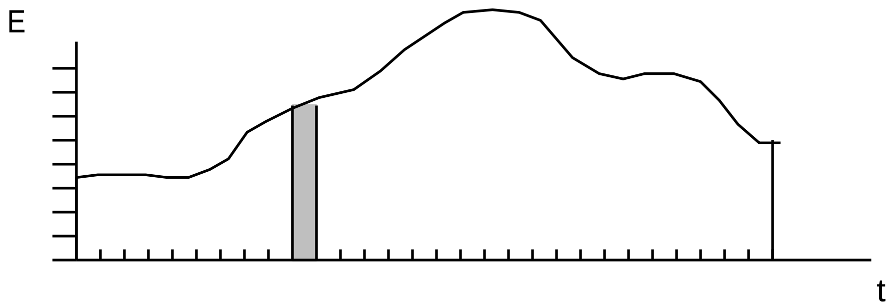
La Trame : L'image est composée des "pixels" (picture elements)



Question : Est-ce-que les pixels sont "carrés"?
Réponse : non.
Le nombre de pixels de l'image dépend de la matérielle.

Par exemple : VGA : 640 x 480

Echantillonage et Numérisation



Les Paramètre Intrinsèque de la Caméra

F :	Distance Focale
C_i, C_j:	Centre Optique de l'Image (en pixels)
D_i, D_j :	Taille Physique d'un Pixel dans la Rétine (pixel/mm)

$i = x_r D_i$ (mm · pixel/mm) + C_i (pixel)

$j = y_r D_j$ (mm · pixel/mm) + C_j (pixel)

Transformation entre repère de l'image et repère de la rétine :

$$P^i = \mathbf{C}_r^i \quad P^r$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_i & 0 & C_i \\ 0 & D_j & C_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou bien:

$$\begin{pmatrix} wi \\ wj \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_i & 0 & C_i \\ 0 & D_j & C_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx_r \\ wy_r \\ w \end{pmatrix}$$

La Composition de la Projection Scène - Image

$$\boxed{P^i = \mathbf{C}^i_r \ \mathbf{P}^r_c \ \mathbf{T}^c_s \ P^s = \mathbf{M}^i_s \ P^s}$$

$$\begin{bmatrix} w\ i \\ w\ j \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{M}^i_s \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$i = \frac{w\ i}{w} = \frac{M^1_s \cdot P^s}{M^3_s \cdot P^s} \qquad j = \frac{w\ j}{w} = \frac{M^2_s \cdot P^s}{M^3_s \cdot P^s}$$

ou bien

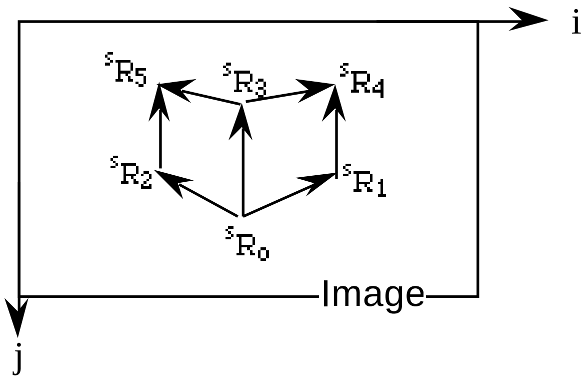
$$i = \frac{w\ i}{w} = \frac{M_{11}\ X_s + M_{12}\ Y_s + M_{13}\ Z_s + M_{14}}{M_{31}\ X_s + M_{32}\ Y_s + M_{33}\ Z_s + M_{34}}$$

$$j = \frac{w\ j}{w} = \frac{M_{21}\ X_s + M_{22}\ Y_s + M_{23}\ Z_s + M_{24}}{M_{31}\ X_s + M_{32}\ Y_s + M_{33}\ Z_s + M_{34}}$$

Calibrage de la Projection Scène - Image

Comment obtenir $\mathbf{M}_s^i$? Par calibrage.

On définit un mire composé de points pour lequels les positions sont connues $R_{k.}^s$



La matrice $\mathbf{M}_s^i$ est composé de 3x4=12 coéfficients. Cépendant, $\mathbf{M}_s^i$ est homogène, avec rang 12-1 = 11.

On détermine une correspondance entre les points dans le scènes (R_k^s) et leurs images (P_k^i). Chaque point donne deux équations pour les 11 inconnus.

Il faut au moins $5\frac{1}{2}$ correspondances pour les 11 inconnus.