

Formation et Analyse d'Images

James L. Crowley

ENSIMAG 3 - Option IRV

Premier Semestre 2007/2008

Séance 1

28 sept 2007

Coordonnées Homogènes

Plan de la Séance :

Coordonnées Homogènes en Notation Tensorielle.....	2
Vecteur et Matrice en Notation Tensorielle.....	2
L'équation d'une droite.....	3
Le produit Croisé.....	4
Intersection de deux droites.....	6
Transformations en Coordonnées Homogènes.....	7
Transformations d'images.....	7
Interpolation Linéaire.....	9
Interpolation Bi-linéaire.....	10
Translation.....	11
Rotation.....	11
Translation et Rotation.....	11
Transformations d'échelle, rotation et translation.....	12

Coordonnées Homogènes en Notation Tensorielle

Les coordonnées homogènes repose sur une notation dans laquelle les vecteurs en N dimensions sont représentées par un vecteur en N+1 dimensions.

Les coordonnées homogènes sont un outil de base en vision, en robotique et en synthèse d'images.

Exemple : un point

Soit un plan Euclidienne en R^2 composé de points,

En notation classique, un point est un vecteur : $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

En notation homogène, un point est un vecteur $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

On note que $a, b : a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

démonstration $a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax/a \\ ay/a \\ a/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Vecteur et Matrice en Notation Tensorielle

En notation tensorielle, la signe " " est remplacé par un indice en super-scripte ou sous-scripte. Une super-scripte signifie un vecteur colonne. Par exemple, le point est indiqué par un vecteur p^i

$$p^i = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

une sous-scripte indique un vecteur ligne

Par exemple, la droite est indiquée par le vecteur l_i :

$$L_i = (l_1, l_2, l_3)$$

Une matrice est une ligne de vecteurs (ou une vecteurs de lignes).

$$M_i^j = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{pmatrix}$$

Le produit d'un vecteur avec une indice en super scripte et une vecteur avec le même indice en sous-scripte signifie une produit scalaire. Ceci est fait par une sommation implicite des indices. (La Convention de Sommation d'Einstein).

Donc, le produit indique une annulation des souscriptes et superscriptes.

$$L_i P^i = l_1 p^1 + l_2 p^2 + l_3 p^3$$

Cette sommation est commutative

$$L_i P^i = P^i L_i$$

Pour la produit d'une matrice et une vecteur, ceci donne une nouvelle vecteur.

$$P_j = M_i^j P^i$$

Ceci représente une transformation du repère "i" vers le repère "j".

L'équation d'une droite

Dans un plan Euclidienne en \mathbb{R}^2 , en notation "classique", une droite est définie par une équation

$$a x + b y + c = 0.$$

On peut exprimer cette équation comme la produit de deux vecteurs :

$$L \cdot P = 0$$

$$\text{ou } L = (a \ b \ c) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

En notation tensorielle, cette équation est exprimé :

$$L_i P^i = 0 \quad \text{avec } i=1, 2, 3.$$

La sommation des indices est implicites.

Le produit Croisé

Une droite est définie par deux points. Un point est défini par le croisement de deux droites. Il y a une dualité parfaite entre les points et les droites.

En notation classique, $ax + by + c = 0$
 le manière de déterminer la droite pour deux points est :

$$\begin{aligned} \text{où} \quad a &= (y_1 - y_2) & b &= (x_2 - x_1) \\ c &= -(a x_1 + b y_1) = -x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_2 - x_1) \\ &= -x_1 y_1 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + y_1 x_1 \\ &= x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{aligned}$$

La droite est $x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) - x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0$

Ceci peut être calculé par la déterminante, avec les variables libres dans le premier colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) = 0 \\ &= x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une méthode générale de déterminer les paramètres d'une équation linéaire à partir des contraintes. Ca marche aussi pour trouver la point d'intersection de deux lignes.

On peut, également, écrire la déterminante comme un produit croisé.

$$L^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P_1 \times P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & y_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -x_1 & y_2 \\ -y_1 & x_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

En notation tensorielle, le déterminant est fait par l'opérateur tensorielle E_{ijk} et E^{ijk} . Cette opérateur signifie une evaluation des indices pour une déterminant.

Exemple : La droite L_i est défini par les points P_j et Q^k :

$$\begin{aligned} L_i &= E_{ijk} P_j Q^k \\ \text{Pour} \quad P_j &= \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1/p^3 \\ p^2/p^3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^j = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1/q^3 \\ q^2/q^3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=1, \quad ijk-ikj &= 123-132 : l_1 = p^2 q^3 - p^3 q^2 \\ i=2, \quad ijk-ikj &= 231-213 : l_2 = p^3 q^1 - p^1 q^3 \\ i=3, \quad ijk-ikj &= 312-321 : l_3 = p^1 q^2 - p^2 q^1 \end{aligned}$$

et si $p^3 = 1$ et $q^3 = 1$ alors nous retrouvons notre forme :

$$P_j = \begin{pmatrix} p^1 & & \\ & p^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_j = \begin{pmatrix} q^1 & & \\ & q^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i=1, \text{ijk-ikj} = 123-132 : l_1 &= p^2 q^3 - p^3 q^2 = p^2 - q^2 \\ i=2, \text{ijk-ikj} = 231-213 : l_2 &= p^3 q^1 - p^1 q^3 = p^1 - q^1 \\ i=3, \text{ijk-ikj} = 312-321 : l_3 &= p^1 q^2 - p^2 q^1 \end{aligned}$$

Intersection de deux droites

Pour le calcul d'un point d'intersection de deux droites.

soit deux droites : $L: ax + by + c = 0$ et $M : dx + ey + f = 0$.

En notation classique : Soit $L = (a \ b \ c)$ et $M = (d \ e \ f)$

Le point d'intersection est $x = \frac{bf-ce}{ae-bd}$ $y = \frac{cd-af}{ae-bd}$

Pour le démontrer :

$$P = L \times M = \begin{vmatrix} 0 & -c & b & d \\ c & 0 & -a & e \\ -b & a & 0 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bf-ce & \\ cd-af & \\ ae-db & \end{vmatrix} = \frac{bf-ce}{ae-db} \frac{cd-af}{ae-db} \frac{1}{1}$$

Le opérateur "x" est équivalent à une déterminant.

Un point est l'intersection d'une infini de droites. Soit deux droites

Soit deux droites (a, b, c) et (d, e, f) . soit une droit "libre" avec coefficient u, v, w :

$$u \cdot x + v \cdot y + w = 0.$$

On peut trouver les coordonnées du point grace au déterminant.

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 = u(bf-ce) + v(cd-af) + w(ae-bd) = 0$$

ou bien $u \cdot \frac{bf-ce}{ae-bd} + v \cdot \frac{cd-af}{ae-bd} + w = 0 = u \cdot x + v \cdot y + w$

donc $x = \frac{bf-ce}{ae-bd}$ et $y = \frac{cd-af}{ae-bd}$ et $1=1$.

En notation Tensorielle, nous avons l'opérateur tensorielle E^{ijk}

On a $P^i = E^{ijk} L_j M_k$

Pour

$$L_j = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} \text{ et } M^k = \begin{pmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \text{ } ijk-ikj = 123-132 : p^1 = l^2 m^3 - l^3 m^2$$

$$i = 2, \text{ } ijk-ikj = 231-213 : p^2 = l^3 m^1 - l^1 m^3$$

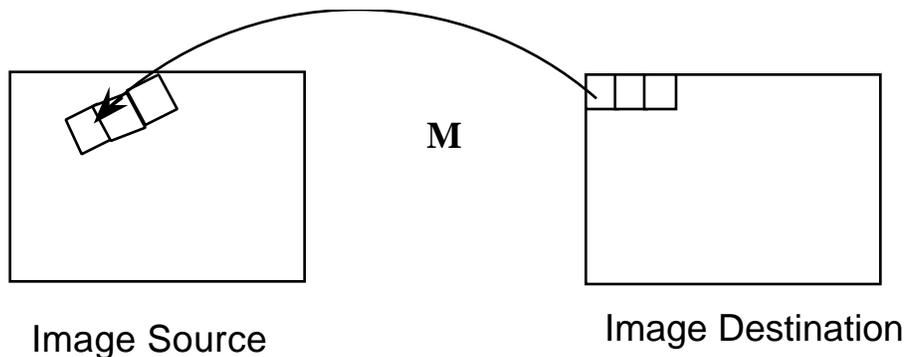
$$i = 3, \text{ } ijk-ikj = 312-321 : p^3 = l^1 m^2 - l^2 m^1$$

Transformations en Coordonnées Homogènes.

Les coordonnées homogènes fournissent une notation uniforme pour les transformations.

Par exemple, les transformations dans un plan sont décrites par une matrice homogène 3×3 .

Transformations d'images



Pour chaque pixel de l'image de destination (x_d, y_d) , on calcule une position (x_s, y_s) dans l'image de la source.

$$P^s = M_d^s P^d$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_s = \frac{p^1}{p^3} \quad y_s = \frac{p^2}{p^3}$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1/p^3 \\ p^2/p^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

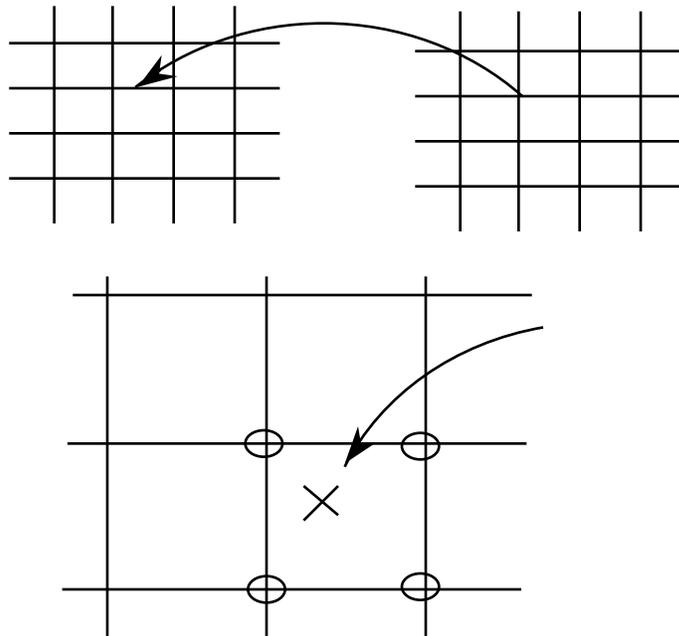
Ensuite la nouvelle valeur de pixel destination, P^2 , est calculé en fonction du voisinage de la position source.

MAIS, $P^s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas des entier!

Quelle valeur faut-il prendre pour les pixels?

Pour chaque pixel du destination, (x_d, y_d) on calcul le position du source, (x_s, y_s) .

Ensuite, on détermine une valeur par interpolation avec les pixels voisins.

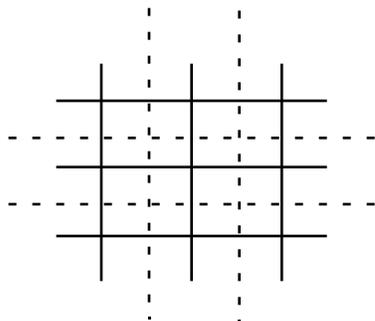


Il existe plusieurs fonctions d'interpolation.

- Ordre zéro : Plus proche voisin.
- Ordre unité : interpolation linéaire et "bi-linéaire"
- Ordre trois : Spline cubic.

Interpolation d'ordre zéro

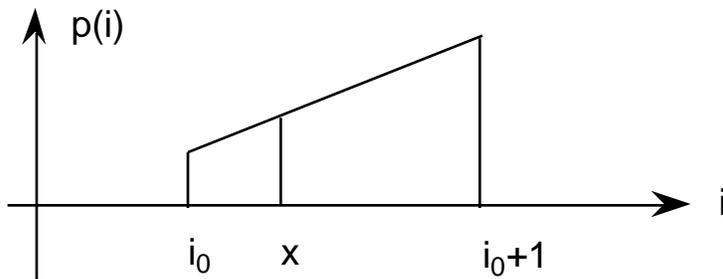
Pour les images Binaire, on peut faire que l'ordre zéro.
 La valeur de $p(i_2, j_2)$ déterminer par arrondis de $p(i_1, j_1)$.



Surface de Décision - - - - -

Interpolation Linéaire

Interpolation Linéaire en 1-D. soit $i_0 \leq x \leq i_0+1$



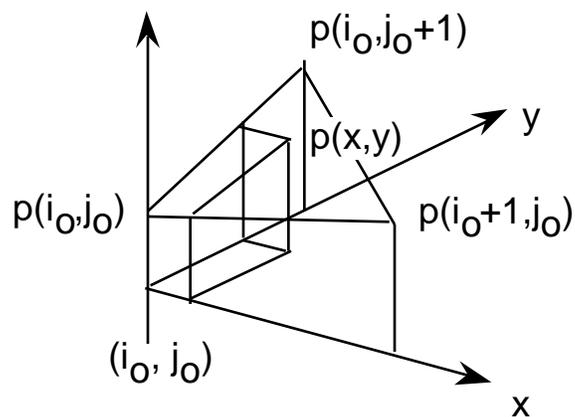
A partir de l'origine : $p(x) = p(0) + m_x x$

A partir de deux points i_0 et i_0+1 :

pende : $m_x = \frac{P}{x} = p(i_0+1) - p(i_0)$

$$p(x) = (x - i_0) m_x + p(i_0)$$

Interpolation Linéaire en 2D

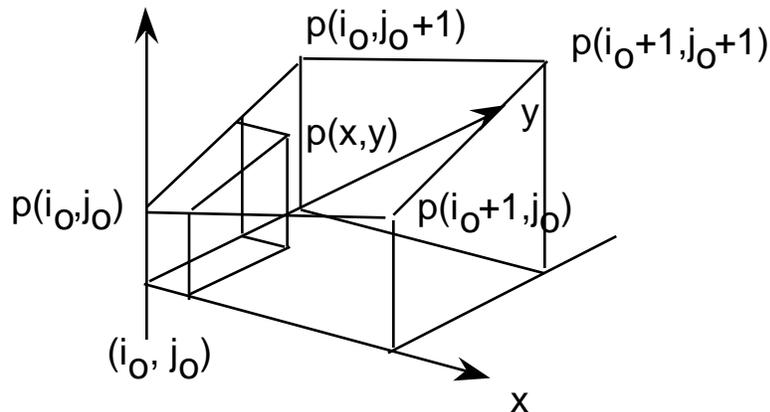


$$m_x = \frac{P}{x} = p(i_0+1, j_0) - p(i_0, j_0)$$

$$m_y = \frac{P}{y} = p(i_0, j_0+1) - p(i_0, j_0)$$

donc $p(x, y) = m_x \cdot (x - i_0) + m_y \cdot (y - j_0) + p(i_0, j_0)$

Interpolation Bi-lineaire



Forme Bilinéaire : Hyperbolic Paraboloïde

$$p(x, y) = a x + b y + c x y + d.$$

Une interpolation linéaire en "y" de deux interpolations linéaire en "x".

Dérivation :

$$p(x, 0) = p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) - p(0, 0))$$

$$p(x, 1) = p(0, 1) + x \cdot (p(1, 1) - p(0, 1))$$

$$p(x, y) = p(x, 0) + y \cdot (p(x, 1) - p(x, 0))$$

$$\begin{aligned} &= p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) - p(0, 0)) \\ &\quad + y \cdot (p(0, 1) + x \cdot (p(1, 1) - p(0, 1))) \\ &\quad - y \cdot (p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) - p(0, 0))) \\ &= p(0, 0) + x \cdot (p(1, 0) - p(0, 0)) + y \cdot (p(0, 1) - p(0, 0)) \\ &\quad + x \cdot y \cdot (p(1, 1) - p(0, 1) - p(1, 0) + p(0, 0)) \end{aligned}$$

Pour le point i_0, j_0 , remplace : 0 \rightarrow i_0 , 1 \rightarrow $i_0 + 1$, x \rightarrow $(x - i_0)$, y \rightarrow $(y - j_0)$

$$a \quad m_x = \frac{P}{x} = p(i_0+1, j_0) - p(i_0, j_0)$$

$$b \quad m_y = \frac{P}{y} = p(i_0, j_0+1) - p(i_0, j_0)$$

$$c \quad m_{xy} = p(i_0+1, j_0) + p(i_0, j_0+1) - p(i_0, j_0) - p(i_0+1, j_0+1)$$

$$d = p(i_0, j_0)$$

$$p(x, y) = a \cdot (x - i_0) + b \cdot (y - j_0) + c \cdot (x - i_0) \cdot (y - j_0) + p(i_0, j_0)$$

Translation

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + t_x, \\y_2 &= y_1 + t_y\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En notation tensorielle :

$$P^B = T_A^B P^A \quad \text{pour } A, B = 1, 2, 3.$$

Donc T_A^B est une transformation du repère A vers le repère B.

Les indices permet de noter les repères.

Rotation

(Repère main droite, rotation sens trigonométrique)

$$\begin{aligned}x_2 &= \cos(\theta) x_1 + \sin(\theta) y_1, \\y_2 &= \sin(\theta) x_1 - \cos(\theta) y_1\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quand le repère tourne dans le sens " ", le vecteur est tourner dans le sens –

Translation et Rotation

$$\begin{aligned}x_2 &= \cos(\theta) x_1 + \sin(\theta) y_1 + t_x \\y_2 &= \sin(\theta) x_1 - \cos(\theta) y_1 + t_y\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & t_x \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En tensorielle, $P^B = R_A^B P^A$

Transformations d'échelle, rotation et translation

Une transformation de similitude d'une image est définie par une rotation, une translation, et un changement de taille des axes.

Soit un changement d'échelle s_x et s_y des axes x_1 et y_1 (repère source) suivi d'une rotation d'angle θ dans le plan de l'image source, suivi d'une translation t_x , t_y s'exprimes dans le repère de la destination.

Ces paramètres donne une transformation $(s_x, s_y, \theta, t_x, t_y)$ de

- 1) Un changement d'échelle des axes, puis
- 2) Une rotation des axes, puis
- 3) Une translation.

$$\begin{array}{rcccl} x_2 & & s_x \cos(\theta) & s_y \sin(\theta) & t_x & x_1 \\ y_2 & = & -s_x \sin(\theta) & s_y \cos(\theta) & t_y & y_1 \\ 1 & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

ou bien

$$\begin{aligned} x_2 &= s_x \cos(\theta) x_1 + s_y \sin(\theta) y_1 + t_x, \\ y_2 &= s_y \sin(\theta) x_1 - s_x \cos(\theta) y_1 + t_y \end{aligned}$$