Systèmes Intelligents : Raisonnement et Reconnaissance

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG Deuxième Semestre 2005/2006

Séance 9 5 avril 2006

# Reconnaissance Bayesienne



Sources Bibliographiques :

"Neural Networks for Pattern Recognition", C. M. Bishop, Oxford Univ. Press, 1995.

"Pattern Recognition and Scene Analysis", R. E. Duda and P. E. Hart, Wiley, 1973.

# Notations

| | |
|---|---|
| $x$ | Une variable |
| $X$ | Une valeur aléatoire (non-prévisible). |
| $N$ | Le nombre de valeurs possible pour x ou X |
| $\vec{x}$ | Un vecteur de D variables |
| $\vec{X}$ | Un vecteur aléatoire (non-prévisible). |
| $D$ | Nombre de dimensions de $\vec{x}$ ou $\vec{X}$ |
| $E$ | Une événement. |
| $A,B$ | des classes d'événements. |
| $T_k$ | La classe k |
| $k$ | Indice d'une classe |
| $K$ | Nombre de classes |
| $\omega_k$ | L'affirmation que Evennement E $T_k$ |
| $M_k$ | Nombre d'exemples de la classe k. |
| $M$ | Nombre totale d'exemples de toutes les classes $M = \sum_{k=1}^{K} M_k$ |
| $h(x)$ | Histogrammes des valeurs (x est entieres avec range limité) |
| $h_k(x)$ | Histogramme des valeurs pour la class k. $h(x) = \sum_{k=1}^{K} h_k(x)$ |
| $Q$ | Nombre de Cellules dans h(x). $Q = N^D$ |
| $p(\omega_k) = p(E \quad T_k)$ | Probabilité que E est un membre de la classe k. |
| $\vec{Y}$ | La valeur d'une observation (un vecteur aléatoire). |
| $P(\vec{X})$ | Densité de Probabilité pour $\vec{X}$ |
| $p(\vec{X} = \vec{x})$ | Probabilité q'un vecteur $\vec{X}$ prendre la valeur $\vec{x}$ |
| $P(\vec{X} \mid \omega_k)$ | Densité de Probabilité pour $\vec{X}$ etant donné que $\omega_k$ |

$$P(\vec{X}) = \sum_{k=1}^{K} p(\vec{X} \mid \omega_k)\, p(\omega_k)$$

# La Loi Normale (suite)

$$\vec{\mu} = E\{\vec{\mathbf{X}}\} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\{x_1\} \\ E\{x_2\} \\ \dots \\ E\{x_n\} \end{pmatrix}$$

Pour D dimensions, la covariance entre les variables $x_i$ et $x_j$ est estimée à partir de M observations $\{\vec{\mathbf{X}}_m\}$

$$\sigma_{ij}^2 \equiv E\{ (X_i - E\{X_i\} )(X_j - E\{X_j\})\} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} (X_{im} - \mu_i)(X_{jm} - \mu_j) )$$

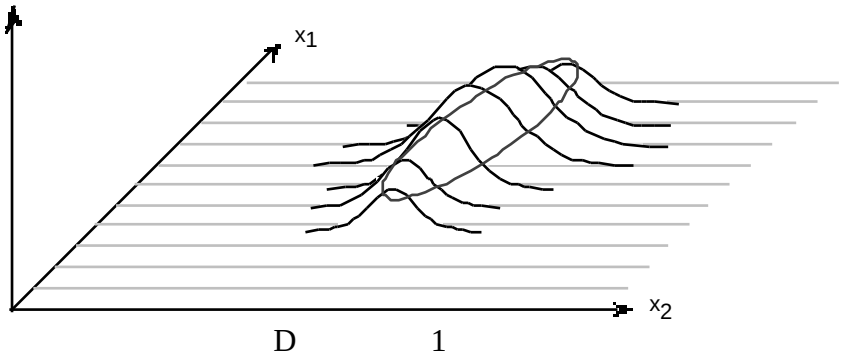
Ces coefficients composent une matrice de covariance. C

$$\mathbf{C}_x \equiv E\{[\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mu})(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mu})^T\} = E([\vec{\mathbf{X}} - E\{\vec{\mathbf{X}}\})(\vec{\mathbf{X}} - E\{\vec{\mathbf{X}}\})^T\}$$

$$\mathbf{C}_x \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1D}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2D}^2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ \sigma_{D1}^2 & \sigma_{D2}^2 & \dots & \sigma_{DD}^2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un vecteur de propriétés, $\vec{X}$, la loi normale prend la forme :

$$p(\vec{X}) = \mathcal{N}(\vec{X}; \vec{\mu}, \mathbf{C}_x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \det(\mathbf{C}_x)^{\frac{1}{2}}} \; e^{-\frac{1}{2}(\vec{X} - \vec{\mu})^T C_x^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu})}$$




Le terme $(2\pi)^{\frac{D}{2}} \det(\mathbf{C}_x)^{\frac{1}{2}}$ est un facteur de normalisation.

## Forme en Algebre Linéaire

Soit les événements E décrit par une vecteur de caractéristiques $\vec{X}$ : (E,$\vec{X}$).
Soit une ensemble aléatoire de M événements avec leurs caractéristiques.

Cet ensemble est dit l'ensemble d'entrainement (training set) $\{\vec{X}_m\}$

Pour un vecteur de D caractéristiques :

$$\vec{\mu} \equiv E\{\vec{X}\} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\vec{X}_m = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \dots\\ \mu_D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E\{X_1\}\\ E\{X_2\}\\ \dots\\ E\{X_D\}\end{pmatrix}$$

Soit $\vec{V} = \vec{X} - E\{\vec{X}\} = \vec{X} - \vec{\mu}$

$$\mathbf{C}_x \equiv E\{\vec{V}\,\vec{V}^T\} \equiv E\{[\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mu})(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mu})^T\}$$

Ceci peut etre exprimé en forme de matrice.

Soit $\vec{V}_m = \vec{X}_m - \vec{\mu}$

On peut faire une matrix V composé de M colones $\{\vec{V}_m\}$

$$V = \begin{pmatrix}v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1M}\\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2M}\\ \dots & \dots & & \dots\\ v_{D1} & v_{D2} & \dots & v_{DM}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_x \equiv V\,V^T = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$$

$\mathbf{C}_x \equiv V\,V^T$ est D x D. Note que $\mathbf{C}_m = V^T V$ est de taille M x M.

## Transformations Linéaire

La transformation linéaire d'une loi normale et une loi normale. Les moments d'une transformation linéaire sont les transformations linéaires des moments.

Soit un vecteur unitaire $\vec{R} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \dots \\ \cos(\alpha_D) \end{pmatrix}$ tel que $\| \vec{R} \| = 1$.

La projection (transformation linéaire) de $\vec{X}$ sur y est

$$y = \vec{R}^T \vec{X}.$$

Pour la covariance :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &\equiv E\{(\vec{R}^T \vec{V})(\vec{R}^T \vec{V})^T\} \\ &= E\{(\vec{R}^T \vec{V})(\vec{V}^T \vec{R})\} \qquad \text{car } (\vec{R}^T \vec{V})^T = (\vec{V}^T \vec{R}) \\ &= E\{\vec{R}^T (\vec{V} \vec{V}^T) \vec{R}\} \\ &= \vec{R}^T E\{\vec{V} \vec{V}^T\} \vec{R} = \vec{R}^T \mathbf{C}_x \vec{R} \end{aligned}$$

La projection de la covariance est la covariance de la projection.
La projection de la moyenne et la covariance sur un axe, $\vec{R}^T$ donne une moyenne $\mu_y$ et variance, $\sigma_y^2$ dans la direction $\vec{R}$.

$$\mu_y = \vec{R}^T \vec{\mu}_x, \qquad \sigma_y^2 = \vec{R}^T \mathbf{C}_x \vec{R}$$

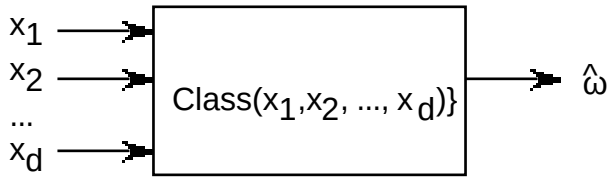
$$p(y) = \mathcal{N}(y;\ \vec{R}^T \vec{\mu}_x, \vec{R}^T \mathbf{C}_x \vec{R}^T) = \mathcal{N}(y;\ \mu_y, \sigma_y^2)$$

Les moments d'une projection sont les projections des moments.

$$\mu_y = E\{p(y)\} = \vec{R}^T \vec{\mu}_x \qquad \sigma_y^2 = E\{(p(y)-\mu_y)(p(y)-\mu_y)\} = \vec{R}^T \mathbf{C}_x \vec{R}$$

# Fonctions de Discrimination

La classification est un processus d'estimation de l'appartenance d'un événement à une des classes $A_k$ fondée sur les caractéristiques de l'événement, $\vec{X}$.




$\hat{\omega}_k$ = Classer(E) = Decider(E $A_k$)

$\hat{\omega}_k$ est la proposition que (E $\omega_k$).

La fonction de classification est composée de deux parties d() et $g_k()$:

$\hat{\omega}_k$ = d(g($\vec{X}$)).

g($\vec{X}$) : Une fonction de discrimination : $R^D \rightarrow R^K$
d() : Une fonction de décision : $R^K \rightarrow \{\omega_K\}$

**Discrimination**

g($\vec{X}$) : Une fonction de discrimination est une fonction $R^D \rightarrow R^K$

$$g(\vec{X}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{X}) \\ g_2(\vec{X}) \\ \dots \\ g_K(\vec{X}) \end{pmatrix}$$

Etant donnée $\vec{X}$, pour chaque k il existe une valeur de probabilité $p(\omega_k \mid X)$

$$p(\omega_k \mid \vec{X}) = \frac{P(\vec{X}|\omega_k)}{P(\vec{X})} \; p(\omega_k)$$

Dans le cas général la nombre minimum d'erreur est fait si $\omega_k$ est choisi tel que

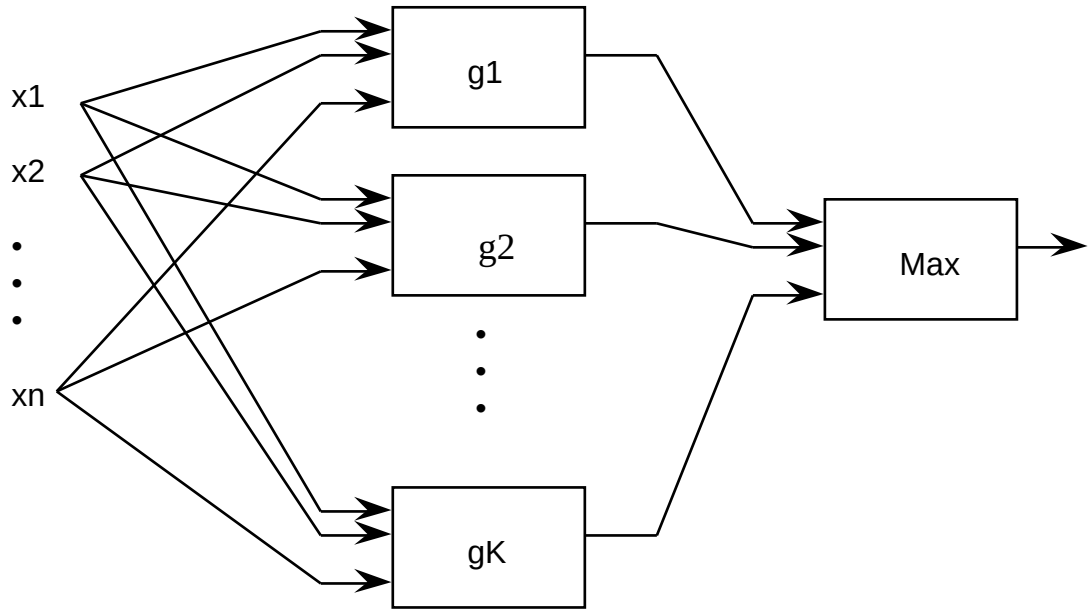
$$k = \arg\max_k\{g_k(X)\} = \arg\max_k\{p(\omega_k \mid \vec{X})\} = \arg\max_k\left\{\frac{P(\vec{X}|\omega_k)}{P(\vec{X})}\ p(\omega_k)\right\}$$

mais, comme $P(\vec{X})$ est constant pour tous k,

$$k = \arg\max_k\{\ (P(\vec{X}|\omega_k)\ p(\omega_k)\}$$

Il suffit de l'evaluer $P(\vec{X}|\omega_k)$, pour $\vec{X}=\vec{x}$

Dans cette forme la classificateur est une machine qui calcule K fonctions $g_k(\vec{x})$ suivie d'une sélection du maximum.




Fonctions classiques :

$$P(\vec{X}|\omega_k) = \mathcal{N}(\vec{X};\ \vec{\mu}_k\ ,\mathbf{C}_k)$$

ou encore

$$P(\vec{X}|\omega_k) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathcal{N}(\vec{X};\ \vec{\mu}_{kn}\ ,\mathbf{C}_{kn})$$

## Simplification de la fonction de Discrimination

Soit D=1, avec

$$p(X=x \mid \omega_k) = \mathcal{N}(x; \mu_k, \sigma_k^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \; e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}$$

Donc notre fonction de discrimination devient :

$$g_k(X) = p(\omega_k) \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \; e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}$$

On peut noter que $k = \underset{k}{\text{arg-max}}\{g_k(X)\} = \underset{\omega_k}{\text{arg-max}}\{\text{Log}\{g_k(X)\}\}$

parce que Log{} est une fonction monotone.

$$k = \underset{k}{\text{arg-max}}\{\text{Log}\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \; e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \} + \text{Log}\{p(\omega_k)\} \}$$

$$k = \underset{k}{\text{arg-max}}\{\text{Log}\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \} + \text{Log}\{e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \} + \text{Log}\{p(\omega_k)\} \}$$

$$k = \underset{k}{\text{arg-max}}\{-\text{Log}\{\sqrt{2\pi}\;\sigma_k\} \; -\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2} + \text{Log}\{p(\omega_k)\} \}$$

$$k = \underset{k}{\text{arg-max}}\{-\text{Log}\{\sigma_k\} \; -\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2} + \text{Log}\{p(\omega_k)\} \}$$

**Classification pour K > 2 et D > 1.**

Dans le cas général, il y a D caractéristique.

$$g_k(\vec{X}) = p(\omega_k \mid \vec{X})\, p(\omega_k)$$

Et le règle de décision est :

$$\hat{\omega}_i \ : \text{si} \quad j \neq i \quad g_i(\vec{X}) > g_j(\vec{X})$$

Dans cette forme le classificateur est une machine qui calcule K fonctions $g_k(\vec{x})$ suivie d'une sélection du maximum.

La fonction de discrimination est : $g_k(\vec{X}) = p(\vec{X} \mid \omega_k)\, p(\omega_k)$

On sélection la classe $\omega_k$ pour laquelle $\arg\max_k\{g_k(\vec{X})\}$

par règle de Bayes :

$$\arg\max_k\{p(\omega_k \mid \vec{X})\} = k = \arg\max_k\{p(\vec{X} \mid \omega_k)\, p(\omega_k)\}$$

$$= \arg\max_k\{\text{Log}\{p(\vec{X} \mid \omega_k)\} + \text{Log}\{p(\omega_k)\}$$

Si les caractéristiques suivent une densité Normale :

$$p(\vec{X} \mid w_k) = \mathcal{N}(\vec{X}, \vec{\mu}_k, C_k)$$

$$\text{Log}\{p(\vec{X} \mid \omega_k)\} = \text{Log}\{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \det(C_k)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{X} - \vec{\mu}_k)^T C_k^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu}_k)}\}$$

$$\text{Log}\{p(\vec{X} \mid \omega_k)\} = -\frac{D}{2} \text{Log}\{2\pi\} - \frac{1}{2} \text{Log}\{\det(C_k)\} - \frac{1}{2}(\vec{X} - \vec{\mu}_k)^T C_k^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu}_k)$$

One note que $-\frac{D}{2} \quad \text{Log}\{2\pi\}$ peut être éliminé parce qu'il est constant pour tout k.

La fonction de discrimination devient :

$$g_k(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \quad \text{Log}\{\det(C_k)\} - \frac{1}{2}(\vec{X} - \vec{\mu}_k) \quad {}^{T}C_k^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}_k) + \text{Log}\{p(\omega_k)\}$$

Les classifiers Bayesiennes sont définies par les variations de cette formule.

## Forme Canonique de la fonction de discrimination

La décision $\omega_k$ est celle qui donne un maximum pour

$$g_k(\vec{X}) = -\frac{1}{2}(\vec{X} - \vec{\mu}_k)^T C_k^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}_k) + \frac{1}{2} \text{Log}\{\det(C_k)\} + \text{Log}\{p(\omega_k)\}$$

On peut réécrire $(\vec{X} - \vec{\mu}_k)^T C_k^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}_k)$ comme

$$\vec{X} C_k^{-1} \vec{X} - \vec{X} C_k^{-1} \vec{\mu}_k - \vec{\mu}_k^T C_k^{-1} \vec{X} + \vec{\mu}_k^T C_k^{-1} \vec{\mu}_k$$

On note que $C_k^{-1}$ est symétrique, et donc $\vec{X} C_k^{-1} \vec{\mu}_k = \vec{\mu}_k^T C_k^{-1} X$

Donc $- \vec{X} C_k^{-1} \vec{\mu}_k - \vec{\mu}_k^T C_k^{-1} \vec{X} = 2 (\vec{\mu}_k^T C_k^{-1})^T \vec{X} = 2 (C_k^{-1} \vec{\mu}_k)^T \vec{X}$

On peut réécrire $g_k(\vec{X})$ comme

$$g_k(\vec{X}) = -\vec{X}^T(\tfrac{1}{2}C_k^{-1}) \vec{X} + (C_k^{-1}\vec{\mu}_k)^T \vec{X} - \frac{1}{2}(\vec{\mu}_k^T C_k^{-1} \vec{\mu}_k) - \frac{1}{2} \text{Log}\{\det(C_k)\} + \text{Log}\{p(w_k)\})$$

ou bien

$$\boxed{g_k(\vec{X}) = \vec{X}^T (D_k) \vec{X} + \vec{d}_k^T \vec{X} + d_{ko.}}$$

avec
$$D_k = \frac{1}{2} C_k^{-1}$$
$$\vec{d}_k = C_k^{-1} \vec{\mu}_k$$
$$d_{ko} = -\frac{1}{2}(\vec{\mu}_k^T C_k^{-1} \vec{\mu}_k) - \frac{1}{2} \text{Log}\{\det(C_k)\} + \text{Log}\{p(\omega_k)\}$$

Cette fonction est composée de trois termes :

une terme quadratique $\vec{X}^T (D_k) \vec{X}$,

une terme linéaire : $\vec{d}_k^T \vec{X}$

et une terme constant : $d_{ko}$

## Bruit et Choix de la Fonction de Discrimination

Comment choisir la fonction pour $P(\vec{X}|\omega_k)$?

Les caractéristiques X de l'événement E sont aléatoires avec une dispersion due aux variations naturelles de sa classe.

Ceci est modélisé par une variable aléatoire $B_k$ autours d'une valeur "type" $x_k$. La valeur type est spécifique à la classe.

$$X = x_k + B_k$$

Chaque observation d'un événement corrompu par une bruit d'observation.

$$Y = x_k + B_k + B_o$$

$B_o$ est souvent Normale, avec moyenne 0 et variance $\sigma_o^2$.
On dit que la variance $\sigma_o^2$ est la précision de la capteur.
Cette bruit ne depend pas de la classe.

Dans ce cas, on observe Y avec

$$p(Y=y \mid \omega_k) = \mathcal{N}(y; \mu_k, \sigma_k^2 + \sigma_o^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_k)^2}{(\sigma_k^2+\sigma_o^2)}}$$

et

$$k = \arg\max_k \{-\mathrm{Log}\{\sqrt{\sigma_k^2+\sigma_o^2}\} - \frac{(y-\mu_k)^2}{2(\sigma_k^2+\sigma_o^2)} + \mathrm{Log}\{p(\omega_k)\}\}$$

$$= \arg\max_k \{-\mathrm{Log}\{\sigma_k\} - \frac{(y-\mu_k)^2}{2(\sigma_k^2+\sigma_o^2)} + \mathrm{Log}\{p(\omega_k)\}\}$$

La conception d'un classifier dépend de la choix de caractéristiques, $\vec{x}$ et du bruit observé sur ses caractéristiques :

Donc $\vec{Y} = \vec{x}_k + \vec{B}_k + \vec{B}_o$

où

$\vec{x}_k$ Est la forme type (moyenne) de la classe k

$\vec{B}_k$ : Les variations aléatoires intra-classe.
Elle est spécifiques à chaque classe et chaque individus.
Elles n'est change pas entre observations.

$\vec{B}_o$ : Les variations aléatoires des observations.
Elles est indépendantes de la classe et de l'individu.
Elles changent avec les observations.

Selon la nature de $\vec{B}_k$, $\vec{B}_o$ et de $p(\omega_k)$ on peut faire certaines simplifications.

par exemple :

Si $\vec{B}_o >> \vec{B}_k$ on peut trouver que $w_k : C_k \approx C$ : On a une classifier linéaire.

Si $i,j \quad \sigma_{ij}^2 = \sigma^2$ C : On a la détecteur optimale utilisé en communication hz.

Exemples de caractéristiques : $\vec{x}$

1) Les échantillons d'un signal : $x(n)$ pour $n \in [1, N]$
2) Les caractéristiques d'un individu : [hauteur, poids, yeux, cheveux etc. ]
3) Les caractéristiques géométriques d'un objet : Hauteur, largeur, nombre de faces, etc.

## Formes Quadratique

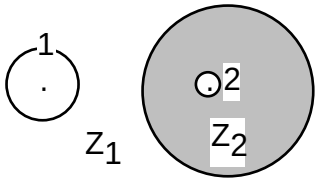
Dans le cas le plus général, on ne fait aucune hypothèse sur $B_k$ et $\vec{B}_o$
Dans ce cas, $\omega_k$, $C_k$ est arbitraire.

La surface de décision est une fonction quadrique en D dimensions.
(une hyper quadriques)

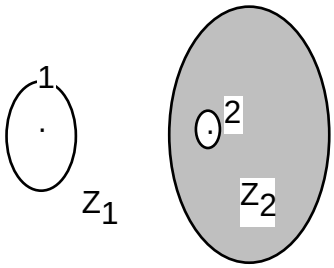
Elle peut être les hyperplans, hyper-sphéres, hyper-ellipsoides, hyper-parabaloides, ou les hyperhyperboloides.

Par exemples, en 2D (D=2) quand K = 2.

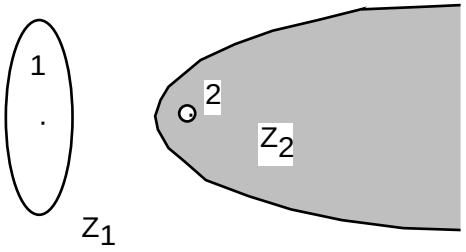
Hyper-sphère :
Pour k = 1, 2 $C_k = \sigma_k^2 I$
et $\det\{C_1\} > \det\{C_2\}$



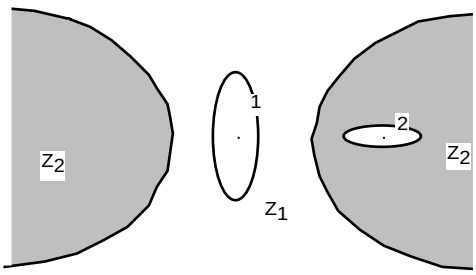

Hyper-éllipsoide :
Pour k = 1, 2 $\sigma_{x1}^2 > \sigma_{x2}^2$
et $\det\{C_1\} > \det\{C_2\}$



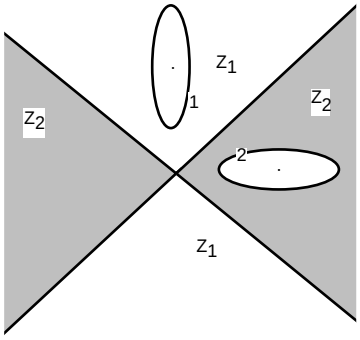

Hyper-paraboloide :
Pour k = 1, 2 $\sigma_{x1k=1}^2 >> \sigma_{x1k=2}^2$
et $\sigma_{x2k=1}^2 > \sigma_{x2k=2}^2$




Hyper-hyperboloides :

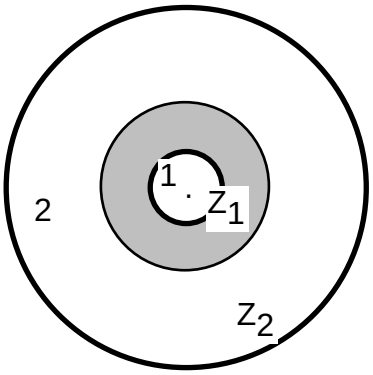


Hyperplanes.

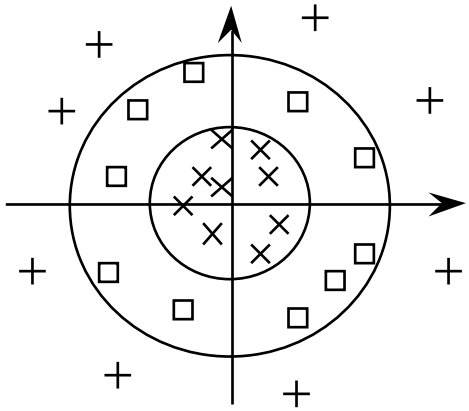



$\vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2$ et $C_1 << C_2$
avec $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$.

Une hypershere.



**Cas des classes avec moyennes égales.**



Supposons que nous avons K classes tel que

$$i, j : \quad \vec{\mu}_i = \vec{\mu}_j \text{ et } \det(C_i) \neq \det(C_j).$$

Comment peut on decider la classe d'un evennement $(E, \vec{X})$ ?

$$g_k(\vec{X}) = \vec{X}^T (D_k) \vec{X} + \vec{d}_k{}^T \vec{X} + d_{ko}.$$

1) $D_k = \frac{1}{2} C_k^{-1}$ est discriminant.

2) $\vec{d}_k = C_k^{-1}\vec{\mu}_k = C_k^{-1}\vec{\mu}$ peut être éliminé.

3) $d_{ko} = -\frac{1}{2} \vec{\mu}_k{}^T C_k^{-1}\vec{\mu}_k + \text{Log}\{p(w_k)\}$ est réduit à

$$d_{ko} = -\frac{1}{2} \vec{\mu}^T C_k^{-1}\vec{\mu} + \text{Log}\{p(\omega_k)\}$$

Il s'agit d'un biais pour chaque classe

donc : $g_k(\vec{X}) = \vec{X}^T (\frac{1}{2} C_k^{-1}) \vec{X} + \text{Log}\{p(\omega_k)\}$

.

Les surfaces de décisions entre classes i et j sont les hyper-surfaces

telles que $g_i(\vec{X}) - g_j(\vec{X}) = 0$ sont les hyper surfaces.